Ce qu'il faut savoir sur les suites géométriques

1 Les suites géométriques.

a. Définition

Définition 1

- Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n, on a :

  $u_{n+1} = u_n \times q$ où q est la raison de la suite géométrique.

Définition 2

Soit (u_n) une suite géométrique.

- L'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \times q$ où q est la raison de la suite géométrique.
- Il faut également connaitre le premier terme de la suite (u_n) que l'on peut noter, par exemple, u_0 .

Chaque terme d'une suite géométrique se déduit donc du précédent en multipliant par la raison q .

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique définie par le premier terme $u_0 = 4$ et de raison 2 . Calculer u_1, u_2 et u_3.

L'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n \times 2$.

Ainsi :

$u_1 = u_0 \times 2 \Leftrightarrow u_1 = 4 \times 2 \Leftrightarrow u_1 = 8$

$u_2 = u_1 \times 2 \Leftrightarrow u_2 = 8 \times 2 \Leftrightarrow u_2 = 16$

$u_3 = u_2 \times 2 \Leftrightarrow u_3 = 16 \times 2 \Leftrightarrow u_3 = 32$

b. L'expression de u_n en fonction de n ou encore l'expression du terme général en fonction de n.

Définition 3

Soit (u_n) une suite géométrique. L'expression de u_n en fonction de n est :

- $u_n = u_0 \times q^n$: lorsque le premier terme vaut u_0 .
- $u_n = u_1 \times q^{n-1}$: lorsque le premier terme vaut u_1 .
- $u_n = u_p \times q^{n-p}$: formule avec un premier terme u_p quelconque .

Exemple : Soit (u_n) une suite géométrique définie par le premier terme $u_0 = \frac{1}{64}$ et de raison 2 . Calculer u_6 .

L'expression de u_n en fonction de n est :

$u_n = u_0 \times q^n$ ainsi $u_n = \frac{1}{64} \times 2^n$.

Finalement : $u_6 = \frac{1}{64} \times 2^6 \Leftrightarrow u_6 = 1$

c. La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Définition 4

Pour savoir le nombre de termes présents dans une somme, faites le calcul suivant :

$\text{grand indice} - \text{petit indice} + 1$

Exemples :

- La somme $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ comprend $n + 1$ termes. Ici le plus grand indice est n , le plus petit indice est 0. Ainsi le nombre de termes est égale à : $n - 0 + 1 = n + 1$. Nous avons donc $n + 1$ termes.
- La somme $S = u_5 + u_6 + \ldots + u_{22}$ comprend 18 termes. Ici le plus grand indice est 22 , le plus petit indice est 5. Ainsi le nombre de termes est égale à : $22 - 5 + 1 = 18$. Nous avons donc 18 termes.

Définition 5

La somme des termes d'une suite géométrique est donnée par la formule suivante :

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (\text{premier terme}) \times \left(\frac{1 - q^{\text{nombres de termes}}}{1 - q}\right)$$

Exemple : Soit (u_n) la suite géométrique définie par le premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3 .

Calculer $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_7$.

D'après la définition 5, nous pouvons écrire que :

$$S = 2 \times \left(\frac{1 - 3^8}{1 - 3}\right)$$

$$S = 6560$$

d. Sens de variation d'une suite géométrique.

Définition 6

Soit une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante égale à u_0.

e. Comportement d'une suite géométrique en l'infini.

Définition 7

Soit une suite (u_n) géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

- Si $0 < q < 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est une suite convergente.
- Si $0 < q < 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est une suite convergente.
- Si $q > 1$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) est une suite divergente dont la limite est $+\infty$.
- Si $q > 1$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) est une suite divergente dont la limite est $-\infty$.

f. Comment reconnaitre une suite géométrique ?

Définition 8

Soit (u_n) une suite de termes non nul.

Si, pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$ où q est un réel, alors la suite (u_n) est géométrique.

Dans ce cas, le réel q sera la raison de la suite géométrique.

Autrement dit, la suite (u_n) est géométrique si et seulement si le rapport entre deux termes consécutifs quelconques est constant.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 4^{n+2}$ est-elle géométrique?

Comme $u_n = 4^{n+2}$ alors $u_{n+1} = 4^{n+1+2} \Leftrightarrow u_{n+1} = 4^{n+3}$

Ainsi :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4^{n+3}}{4^{n+2}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4^{n+3-(n+2)}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4^{n+3-n-2}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 4$$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 4^2 = 16$.