Ce qu'il faut savoir sur les suites arithmétiques

1 Les suites arithmétiques.

a. Définition

Définition 1

Soit (u_n) une suite arithmétique.

- L'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

  où r est la raison de la suite arithmétique.

- Il faut également connaitre le premier terme de la suite (u_n) que l'on peut noter, par exemple, u_0 .

Définition 2

Soit (u_n) une suite arithmétique.

- L'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + r$

  où r est la raison de la suite arithmétique.

- Il faut également connaitre le premier terme de la suite (u_n) que l'on peut noter, par exemple, u_0 .

Chaque terme d'une suite arithmétique se déduit donc du précèdent en rajoutant la raison r .

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique définie par le premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5 . Calculer

u_1 , u_2 et u_3 .

L'expression de u_{n+1} en fonction de u_n est donnée par la relation de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 5$.

Ainsi :

$u_1 = u_0 + 5 \Leftrightarrow u_1 = 3 + 5 \Leftrightarrow u_1 = 8$

$u_2 = u_1 + 5 \Leftrightarrow u_2 = 8 + 5 \Leftrightarrow u_2 = 13$

$u_3 = u_2 + 5 \Leftrightarrow u_3 = 13 + 5 \Leftrightarrow u_3 = 18$

b. L'expression de u_n en fonction de n ou encore l'expression du terme général en fonction de n.

Définition 3

Soit (u_n) une suite arithmétique. L'expression de u_n en fonction de n est :

- $u_n = u_0 + n \times r$: lorsque le premier terme vaut u_0 .
- $u_n = u_1 + (n-1) \times r$: lorsque le premier terme vaut u_1 .
- $u_n = u_p + (n-p) \times r$: formule avec un premier terme u_p quelconque .

Exemple : Soit (u_n) une suite arithmétique définie par le premier terme $u_0 = 3$ et de raison 5 . Calculer u_7 .

L'expression de u_n en fonction de n est :

$u_n = u_0 + n \times r$ ainsi $u_n = 3 + n \times 5$ que l'on écrit $u_n = 3 + 5n$.

Finalement : $u_7 = 3 + 5 \times 7 \Leftrightarrow u_7 = 3 + 35 \Leftrightarrow u_7 = 38$

c. La somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Définition 4

Pour savoir le nombre de termes présents dans une somme, faites le calcul suivant :

$\text{grand indice} - \text{petit indice} + 1$

Exemples :

- La somme $S=u_0+u_1+u_2+\ldots+u_n$ comprend $n+1$ termes. Ici le plus grand indice est n , le plus petit indice est 0. Ainsi le nombre de termes est égale à : $n-0+1=n+1$. Nous avons donc $n+1$ termes.
- La somme $S=u_5+u_6+\ldots+u_{22}$ comprend 18 termes. Ici le plus grand indice est 22 , le plus petit indice est 5. Ainsi le nombre de termes est égale à : $22-5+1=18$. Nous avons donc 18 termes.

Définition 5

La somme des termes d'une suite arithmétique (u_n) est donnée par la formule suivante :

$$u_0+u_1+\ldots+u_n=(\text{nombres de termes})\times\left(\frac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}\right)$$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique définie par le premier terme $u_0=2$ et de raison 7 .

Calculer $S=u_0+u_1+\ldots+u_6$.

D'après la définition 5, nous pouvons écrire que :

$S=7\times\left(\frac{u_0+u_6}{2}\right)$. Il nous faut aussi calculer u_6.

Or, l'expression de u_n en fonction de n est : $u_n=2+7n$ ce qui donne $u_6=2+7\times 6=44$

Il vient alors que :

$S=7\times\left(\frac{2+44}{2}\right)\Leftrightarrow S=161$

d. Sens de variation d'une suite arithmétique.

Définition 6

Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r alors :

- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

e. Comportement d'une suite arithmétique en l'infini.

Définition 7

Soit une suite (u_n) arithmétique de raison r alors :

- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est une suite divergente dont la limite est $-\infty$.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est une suite divergente dont la limite est $+\infty$.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est convergente dont la limite est le premier terme de la suite.

f. Comment reconnaitre une suite arithmétique ?

Définition 8

Si, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = r$ où r est un réel, alors la suite (u_n) est arithmétique.

Dans ce cas, le réel r sera la raison de la suite arithmétique.

Autrement dit, la suite (u_n) est arithmétique si et seulement si la différence entre deux termes consécutifs quelconques est constante.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_n = 3n - 9$ est-elle arithmétique?

Comme $u_n = 3n - 9$ alors $u_{n+1} = 3\left(n+1\right) - 9 \Leftrightarrow u_{n+1} = 3n - 6$

Ainsi :

$u_{n+1} - u_n = 3n - 6 - (3n - 9)$

$u_{n+1} - u_n = 3n - 6 - 3n + 9$

$u_{n+1} - u_n = 3$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $u_0 = -9$.