Cours sur la fonction exponentielle

1 La fonction exponentielle

a. Définition

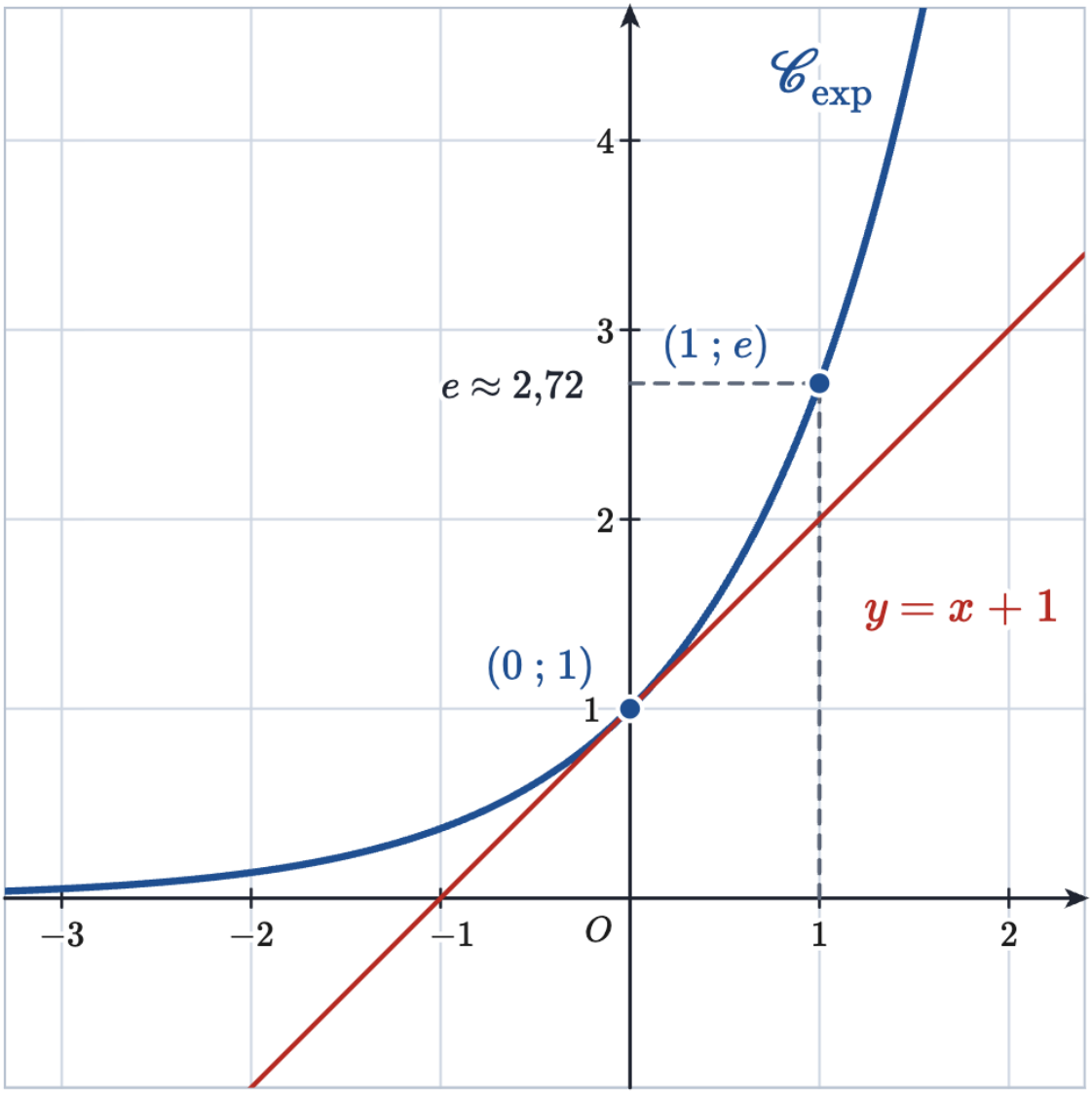
Définition

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction s'appelle la **fonction exponentielle** et se note $\exp$.

- Pour tout réel x : $\exp'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- Le nombre $\exp(1)$ est noté e : $e \approx 2{,}718$.
- Pour tout réel x, on note $\exp(x) = e^x$. Ainsi $e^0 = 1$, $e^1 = e$ et $(e^x)' = e^x$.

b. Courbe représentative



À retenir :

- La courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ passe par les points de coordonnées $(0;1)$ et $(1;e)$.
- Comme $\exp'(0) = e^0 = 1$, la tangente à $\mathcal{C}_{\exp}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = 1 \times (x - 0) + 1$, c'est-à-dire $y = x + 1$.

2 Les propriétés algébriques

Propriété 1

Pour tous réels a et b, et pour tout entier relatif n :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Exemples :

Écrire les réels suivants sous la forme e^k où k est un entier relatif.

$A = e^2 \times e^6$; $B = \dfrac{e^4}{e^{-3}}$; $C = \dfrac{e^3 \times e^2}{(e^5)^4}$

- $A = e^2 \times e^6 = e^{2+6} = e^8$
- $B = \dfrac{e^4}{e^{-3}} = e^{4-(-3)} = e^{4+3} = e^7$
- $C = \dfrac{e^3 \times e^2}{(e^5)^4} = \dfrac{e^{3+2}}{e^{5\times 4}} = \dfrac{e^5}{e^{20}} = e^{5-20} = e^{-15}$

3 Signe, variations et conséquences

a. Signe et sens de variation

Propriété 2

- La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de e^x		$+$	‖	$+$	
variation de exp		↗	1	↗	

Pourquoi ?

- Pour tout réel x, $e^x \times e^{-x} = e^{x-x} = e^0 = 1$, donc $e^x \neq 0$.
- De plus $e^x = e^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \geq 0$. Ainsi $e^x > 0$.

- Comme $\exp' = \exp$, la dérivée est strictement positive sur $\mathbb{R}$: la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode : étudier le signe d'une expression

Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, un facteur e^x ne change pas le signe d'un produit.

Étudier le signe de $f(x) = (2x - 6)\,e^x$ sur $\mathbb{R}$.

$e^x > 0$, donc $f(x)$ a le même signe que $2x - 6$. Or $2x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
signe de $2x - 6$		$-$	0	$+$	
signe de e^x		$+$	|	$+$	
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$f(x) < 0$ sur $]-\infty; 3[$; $f(3) = 0$; $f(x) > 0$ sur $]3; +\infty[$

b. Équations

Propriété 3

Pour tous réels a et b : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{3x-1} - e^{5x-7} = 0$.

$e^{3x-1} - e^{5x-7} = 0$

équivaut successivement à :

$e^{3x-1} = e^{5x-7}$

$3x - 1 = 5x - 7$

$3x - 5x = -7 + 1$

$-2x = -6$

$x = \dfrac{-6}{-2}$

$x = 3$

L'unique solution de l'équation est 3 : $S = \{3\}$.

Remarques :

- $e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$.

- Une équation comme $e^x = -2$ n'a pas de solution, car $e^x > 0$ pour tout réel x.

C. Inéquations

Propriété 4

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, pour tous réels a et b :

- $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$
- $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2e^{5x-4} - 2 \geq 0$.

$2e^{5x-4} - 2 \geq 0$

équivaut successivement à :

$2e^{5x-4} \geq 2$

$e^{5x-4} \geq \dfrac{2}{2}$

$e^{5x-4} \geq 1$

$e^{5x-4} \geq e^0$

$5x - 4 \geq 0$

$5x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{5}$

$S = \left[\frac{4}{5}; +\infty\right[$

4 Dérivées

a. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^x$

Propriété 5

La fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x : $\left(e^x\right)' = e^x$.

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 3e^x + 2$. Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x :

$f'(x) = 5 - 3e^x$

Exemple 2 : dérivée d'un produit et variations

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x$.

On pose $u(x) = x - 1$ et $v(x) = e^x$: $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$.

$g'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

$g'(x) = 1 \times e^x + (x-1)e^x$

$g'(x) = e^x(1 + x - 1)$

$g'(x) = xe^x$

Comme $e^x > 0$, $g'(x)$ a le signe de x. De plus $g(0) = (0-1)e^0 = -1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
signe de x		$-$	0	$+$	
signe de e^x		$+$		$+$	
signe de $g'(x)$		$-$	0	$+$	
variation de g		↘	-1	↗	

b. Dérivée de la fonction $x \mapsto e^{ax+b}$

Propriété 6

Soient a et b deux réels. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout réel x, on a : $f'(x) = ae^{ax+b}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{4x-3}$. Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici nous avons $a = 4$ et $b = -3$: $f(x) = 2e^{4x-3}$.

Ainsi : $f'(x) = 2 \times 4 \times e^{4x-3}$

D'où $f'(x) = 8e^{4x-3}$

c. Variations des fonctions $x \mapsto e^{kx}$

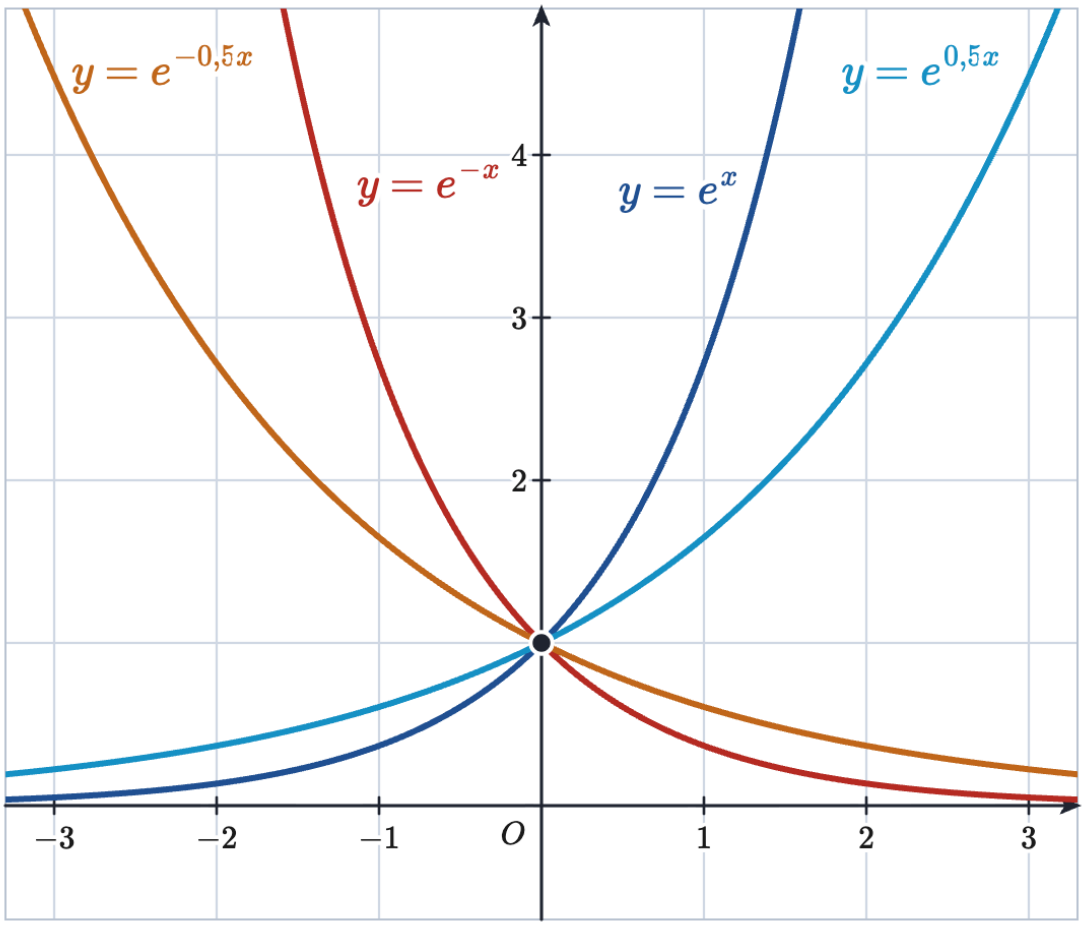
Propriété 7

Soit k un réel non nul et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{kx}$.

- Si $k > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $k < 0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Pourquoi ?

D'après la propriété 6, $f'(x) = ke^{kx}$. Comme $e^{kx} > 0$, $f'(x)$ a le signe de k.



Toutes ces courbes passent par le point de coordonnées $(0; 1)$ car $e^{k\times 0} = e^0 = 1$.

5 Lien avec les suites géométriques

Propriété 8

Soient a et b deux réels. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$u_n = be^{an}$ est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme $u_0 = b$.

Pourquoi ?

Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = be^{a(n+1)} = be^{an+a} = be^{an} \times e^a = e^a \times u_n$.

Exemple :

La suite (u_n) définie par $u_n = 3e^{-0,5n}$ est géométrique de raison $q = e^{-0,5} \approx 0,61$

et de premier terme $u_0 = 3$.

Comme $u_0 > 0$ et $0 < q < 1$, la suite (u_n) est **décroissante**.