Cours sur la fonction exponentielle

1 La fonction exponentielle

a. Définition de la fonction exponentielle

Définition 1

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction f s'appelle la fonction exponentielle, notée $x \mapsto e^x$.

- On note alors $(e^x)' = e^x$
- $e^0 = 1$

2 Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle

a. Propriétés

Propriétés

Pour tous réels a et b, et pour tout entier naturel n :

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$
- $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$
- $e^{na} = (e^a)^n$

Exemples :

Ecrire les réels donnés sous la forme e^k où k est un entier relatif.

$$A = e^2 \times e^6 \ ; B = \frac{e^4}{e^{-3}} \ ; C = \frac{e^3 \times e^2}{(e^5)^4}.$$

Il vient alors que :

- $A = e^2 \times e^6 \Leftrightarrow A = e^{2+6} \Leftrightarrow A = e^8$
- $B = \dfrac{e^4}{e^{-3}} \Leftrightarrow B = e^{4-(-3)} \Leftrightarrow B = e^{4+3} \Leftrightarrow B = e^7$
- $C = \dfrac{e^3 \times e^2}{(e^5)^4} \Leftrightarrow C = \dfrac{e^{3+2}}{e^{5\times 4}} \Leftrightarrow C = \dfrac{e^5}{e^{20}} \Leftrightarrow C = e^{5-20} \Leftrightarrow C = e^{-15}$

3 Applications de la fonction exponentielle

Définition 2

- La fonction exponentielle est **strictement positive** sur $\mathbb{R}$. Ainsi pour tout réel x, on a : $e^x > 0$.
- La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

a. Propriétés et équations

Définition 3

- Pour tous réels x et y, $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $e^{3x-1}-e^{5x-7}=0$

$e^{3x-1}-e^{5x-7}=0$

équivaut successivement à :

$e^{3x-1}=e^{5x-7}$

$3x-1=5x-7$

$3x-5x=-7+1$

$-2x=-6$

$x=\dfrac{-6}{-2}$

$x=3$

L'unique solution de l'équation $e^{3x-1}-e^{5x-7}=0$ est $x=3$.

b. Propriétés et inéquations

Définition 4

- Pour tous réels x et y, $e^x \geq e^y \Leftrightarrow x \geq y$
- Pour tous réels x et y, $e^x \leq e^y \Leftrightarrow x \leq y$

Exemple :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $2e^{5x-4}-2 \geq 0$

$2e^{5x-4}-2 \geq 0$

équivaut successivement à :

$2e^{5x-4} \geq 2$

$e^{5x-4} \geq \frac{2}{2}$

$e^{5x-4} \geq 1$

$e^{5x-4} \geq e^{0}$

$5x-4 \geq 0$

$5x \geq 4$

$x \geq \frac{4}{5}$

4 Dérivée de la fonction e^{x}

Définition 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Pout tout réel x, on a : $f'(x) = e^{x}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x - 3e^{x} + 2$.

Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi

$f'(x) = 5 - 3e^{x}$

5 Dérivée de la fonction e^{ax+b}

Définition 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ avec a et b deux réels. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- Pout tout réel x, on a : $f'(x) = ae^{ax+b}$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{4x-3}$. Calculer $f'(x)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Ici nous avons $a = 4$ et $b = -3$.

$f(x) = 2e^{4x-3}$

Ainsi :

$f'(x) = 2 \times 4 \times e^{4x-3}$

D'où

$f'(x) = 8e^{4x-3}$

6 Lien entre les suites et la fonction exponentielle

Définition 7

- Soient a et b deux réels.

  Pour tout entier naturel n, la suite (be^{an}) est une suite géométrique de raison e^a et de premier terme

b .