

Raisonement par récurrence et limite d'une suite

1 Raisonement par récurrence

a. Axiome de récurrence

Définition 1

Soit une propriété P définie sur \mathbb{N} . Si :

- la propriété est **initialisée** à partir d'un certain rang n_0
- la propriété est **héréditaire** à partir d'un certain rang n_0 (c'est-à-dire que pour tout $n \geq n_0$) alors

$$P(n) \Rightarrow P(n+1)$$

Alors : la propriété est vraie à partir du rang n_0

b. Exemple

Démontrer que, pour tout entier naturel, la suite (u_n) est définie par : $u_0 = 1$ et $u_n + 1 = \sqrt{2 + u_n}$ est telle que

$$0 < u_n < 2$$

Initialisation

On a $u_0 = 1$ donc $0 < u_0 < 2$.

$P(0)$ est vraie.

Hérédité

On suppose que $0 < u_n < 2$, montrons que $0 < u_n + 1 < 2$.

La fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ est croissante car composée de deux fonctions croissantes.

$$0 < u_n < 2 \Leftrightarrow f(0) < f(u_n) < f(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} < u_n + 1 < 2 \Rightarrow 0 < u_n + 1 < 2$$

La proposition $P(n)$ est héréditaire.

Conclusion

Par initialisation et hérédité, la proposition $P(n)$ est vraie pour tout n .

② Limite d'une suite

Définition 2

On dit que la suite (u_n) a pour limite l si, et seulement si, tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ et l'on dit que la suite **converge** vers l .

On dit que la suite (u_n) a pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, et seulement si, tout intervalle $]A; +\infty[$ (resp. $] - \infty; B[$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

On note alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ resp. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$

On dit que la suite **diverge** vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Soit trois suites (u_n) , (v_n) et (w_n) .

Si à partir d'un certain rang, on a :

Théorème d'encadrement ou "des gendarmes"

$$v_n \leq u_n \leq w_n \text{ et si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$a = b + c$$

Théorème de comparaison

$$\bullet \quad u_n \geq v_n \text{ et si } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\bullet \quad u_n \leq w_n \text{ et si } \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = -\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

Suites géométriques

Soit q un réel.

On a les limites suivantes :

- Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- Si $q \leq -1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas

3 Opérations sur les limites

a. Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) a pour limite	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F. Ind.

b. Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	0	∞
Si (v_n) a pour limite	l'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$l \times l'$	∞	F. Ind.	∞

c. Limite d'un quotient

Si (u_n) a pour limite	l	$l \neq 0$	0	l	∞	∞
Si (v_n) a pour limite	$l' \neq 0$	0	0	∞	l'	∞
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{l}{l'}$	∞	F. ind.	0	∞	F. ind.

④ Convergence d'une suite monotone

Définition 3

On dit que la suite (u_n) est **majorée** si, et seulement si, il existe un réel M tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq M$$

On dit que la suite (u_n) est **minorée** si, et seulement si, il existe un réel m tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq m$$

Si (u_n) est majorée et minorée, on dit que la suite est **bornée**.

Divergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et non majorée** alors la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
- Si une suite (u_n) est **décroissante et non minorée** alors la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

Convergence

- Si une suite (u_n) est **croissante et majorée** alors la suite (u_n) converge.

- Si une suite (u_n) est **décroissante et minorée** alors la suite (u_n) converge.

Théorème du point fixe

Soit une suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$ convergente vers l .

Si la fonction associée f est continue en l , alors la limite de la suite l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple

Calculer la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{2} + u_n$.

On peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante et que pour tout n , $0 \leq u_n \leq 2$.

La suite (u_n) est alors croissante et majorée par 2, elle est donc convergente vers une limite l .

La fonction f telle que : $f(x) = \sqrt{2} + x$ est définie et continue sur $] - 2; +\infty[$.

Comme la suite (u_n) est convergente vers l , d'après le théorème du point fixe, l vérifie l'équation $l = \sqrt{2} + l$.

En élevant au carré, on trouve : $l^2 - l - 2 = 0$ qui admet deux solutions -1 et 2 . Comme la suite (u_n) est positive, elle converge donc vers 2.